

# Lösungen zu den Aufgaben

## Kapitel 2

### Aufgabe 2.3.1

Es gilt für die Z-Y-X-Euler-Winkel:  $A = 0^\circ, B = -30^\circ, C = 90^\circ$  (s. Bild L1).

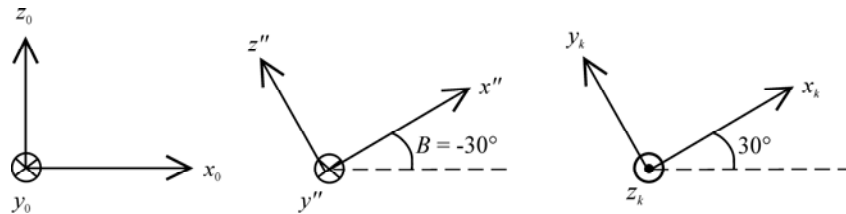


Bild L1: Euler-Winkel mit Zwischenergebnis

Die zu den Drehungen gehörenden Rotationsmatrizen nach Gl. (2.20) sind:

$${}^0_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^1_2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & 0 & -\sin 30^\circ \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin 30^\circ & 0 & \cos 30^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix},$$

$${}^2_3\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, {}^k_0\mathbf{A} = {}^0_1\mathbf{A} \cdot {}^1_2\mathbf{A} \cdot {}^2_3\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Das Ergebnis  ${}^k_0\mathbf{A}$  kann direkt durch Beschreibung der Einheitsvektoren  $x_k, y_k, z_k$  im Koordinatensystem  $K_0$  nachgeprüft werden.

### Aufgabe 2.3.2

Es gilt  $\mathbf{R} = {}^Z_R\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ . Die  $x$ -Achse des Zielkoordinatensystems zeigt in Richtung

der  $y$ -Achse des Referenzkoordinatensystems, da der erste Spaltenvektor von  ${}^Z_R\mathbf{A}$   $[0, 1, 0]^T$  beträgt. Entsprechend sind die Richtungen der beiden anderen Einheitsvektoren

festzulegen. Das Referenzkoordinatensystem wird beliebig in der Zeichenebene als Rechtssystem festgelegt (s. Bild L2).

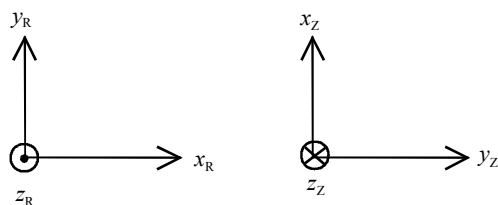


Bild L2: Lösung des ersten Teils der Aufgabe 2.3.2

Mit Gl. (2.19) erhält man für die Z-Y-Z-Euler-Winkel:

$$\beta = \pi \Rightarrow \alpha = 0, \chi = \arctan 2(1, 0) = \pi / 2.$$

Entsprechend kann man mit Gl. (2.21) die Z-Y-X-Euler-Winkel berechnen:

$$A = \arctan 2(1, 0) = \pi / 2, B = \arcsin(0) = 0, C = \arctan 2(0, -1) = \pi$$

### Aufgabe 2.3.3

Nach Bild 2.16b und Gl. (2.23) wird  $\mathbf{v}_{s_2}$  zu

$$\mathbf{v}_{s_2} = \frac{d\mathbf{r}_{s_2}}{dt} = \frac{d^{(2)}\mathbf{p}_2}{dt} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{s_2}$$

berechnet.  $\mathbf{v}_{s_2}$  wird nach der Zeit differenziert:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{s_2} = \dot{\mathbf{v}}_{s_2} &= \frac{d^2\mathbf{r}_{s_2}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d^{(2)}\mathbf{p}_2}{dt} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{s_2} \right) = \\ &= \frac{d^{2,(2)}\mathbf{p}_2}{dt^2} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \frac{d^{(2)}\mathbf{p}_2}{dt} + \left( \frac{d^{(2)}\boldsymbol{\omega}_2}{dt} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_2 \right) \times \mathbf{r}_{s_2} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \frac{d\mathbf{r}_{s_2}}{dt} \end{aligned}$$

Beachtet man Gl. (2.24) und setzt  $\frac{d\mathbf{r}_{s_2}}{dt}$  ein, erhält man:

$$\mathbf{b}_{s_2} = \dot{\mathbf{v}}_{s_2} = \frac{d^{2,(2)}\mathbf{p}_2}{dt^2} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \frac{d^{(2)}\mathbf{p}_2}{dt} + \frac{d^{(2)}\boldsymbol{\omega}_2}{dt} \times \mathbf{r}_{s_2} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{v}_{s_2}$$

Wie im Beispiel in Abschn. 2.1.10 wird angenommen, dass sämtliche Vektoren im Koordinatensystem 2 zu

$$\mathbf{p}_2 = [0, 0, d_2]^T, \mathbf{s}_2 = [0, 0, -l_{s_2}]^T, \boldsymbol{\omega}_2 = [0, -\dot{\theta}, 0]^T$$

gegeben sind. Setzt man diese Werte ein, wird  $\mathbf{b}_{s_2}$  zu:

$$\mathbf{b}_{S_2}^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{d}_2 - (d_2 - l_{s_2}) \cdot \ddot{\theta} \\ 0 \\ \ddot{d}_2 - \dot{\theta}^2 \cdot (d_2 - l_{s_2}) \end{bmatrix}$$

Die Darstellung in  $K_0$  wird durch Multiplikation mit der Rotationsmatrix  ${}^2_0\mathbf{A}$  erreicht:

$$\mathbf{b}_{S_2}^{(0)} = {}^2_0\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_{S_2}^{(2)} = \begin{bmatrix} \left( -2 \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{d}_2 - (d_2 - l_{s_2}) \cdot \ddot{\theta} \right) \cdot \sin \theta + \left( \ddot{d}_2 - \dot{\theta}^2 \cdot (d_2 - l_{s_2}) \right) \cdot \cos \theta \\ 0 \\ \left( 2 \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{d}_2 + (d_2 - l_{s_2}) \cdot \ddot{\theta} \right) \cdot \cos \theta + \left( \ddot{d}_2 - \dot{\theta}^2 \cdot (d_2 - l_{s_2}) \right) \cdot \sin \theta \end{bmatrix}$$

### Aufgabe 2.3.4

In der gezeichneten Stellung (Bild 2.20) nimmt der RV12 die Winkel  $\theta_1 = 0^\circ$ ,  $\theta_2 = -90^\circ$  ein. Die geforderte Zielstellung wird dadurch erreicht, dass man in Gedanken zuerst nur Gelenk 1 zur Zielstellung dreht und anschließend Gelenk 2. Gelenk 1 ist um  $-180^\circ$  zu drehen, dabei bewegen sich die Koordinatensysteme  $K_1$  und  $K_2$  mit (Zwischenstellung). Um die Zielstellung  $\theta_2 = -135^\circ$  zu erreichen, muss Gelenk 2 um  $-45^\circ$ , also in negativer Richtung der  $z_1$ -Achse, gedreht werden.

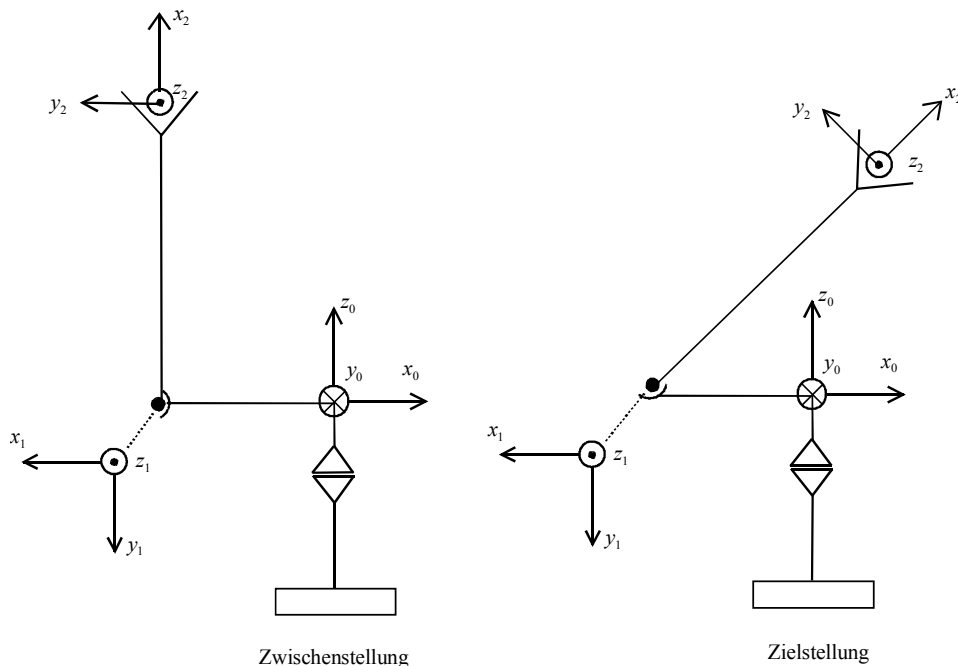


Bild L3: Lösung der Aufgabe 2.3.4

**Aufgabe 2.3.5**

In der rechts gezeichneten Stellung von Bild 2.22 kann die homogene Matrix direkt, ohne Gl. (2.27) zu nutzen, angegeben werden:

$$\mathbf{T}_W = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_3^{(0)} & \mathbf{y}_3^{(0)} & \mathbf{z}_3^{(0)} & \mathbf{p}_0^{(0)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für die Rotationsmatrix  ${}^0_3\mathbf{A}$  gilt:

$${}^0_3\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0^{(3)} & \mathbf{y}_0^{(3)} & \mathbf{z}_0^{(3)} \end{pmatrix} = {}^3_0\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_3^{(0)} & \mathbf{y}_3^{(0)} & \mathbf{z}_3^{(0)} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Ortsvektor  $\mathbf{p}_H^{(0)}$  von  $K_0$  zum Punkt  $P$ , kann mit

$$\mathbf{p}_H^{(0)} = \mathbf{T}_W(\theta_1 = \pi/2, \theta_2 = 0, d_3 = 0.5) \cdot \mathbf{p}_H^{(3)} = {}^1_0\mathbf{T}(\theta_1 = \pi) \cdot {}^2_1\mathbf{T}(\theta_2 = 0) \cdot {}^3_2\mathbf{T}(d_3 = 0.5) \cdot \mathbf{p}_H^{(3)}$$

berechnet werden, wobei die Ortsvektoren vier Komponenten mit einer 1 als vierte Komponente haben. Mit den konstanten Denavit-Hartenberg Parameter, die in Bild 2.22 angegeben sind und den angegebenen Gelenkkoordinaten werden die Gln. (2.26) und (2.27) zur Berechnung verwendet:

$$\mathbf{p}_H^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.25 \\ -0.4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ -0.5 \\ 0.9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Aufgabe 2.3.6**

Variable Denavit-Hartenberg-Parameter und damit die Gelenkkoordinaten sind  $\theta_1$  und  $\theta_2$ . Nach der Denavit-Hartenberg-Konvention haben sie in der in Bild 3.5 abgebildeten Stellung die Werte  $\theta_1 = 0^\circ$ ,  $\theta_2 = -90^\circ$ . Die konstanten Denavit-Hartenberg-Parameter sind:

$$d_1 = d_2 = 0, a_1 = l_1, a_2 = l_2, \alpha_1 = \alpha_2 = 0^\circ,$$

Um in die Stellung  $\theta_1 = 0^\circ$ ,  $\theta_2 = 0^\circ$  zu gelangen, muss Gelenk 2 um  $+90^\circ$  gedreht werden, also in positiver  $z_1$ -Richtung (Bild L4, links). Um die Stellung  $\theta_1 = -45^\circ$ ,  $\theta_2 = 135^\circ$  zu erreichen, kann aus dieser Stellung heraus entsprechend negativ um  $z_0$  und positiv um  $z_1$  gedreht werden und man erhält die Stellung in Bild L4, rechts.

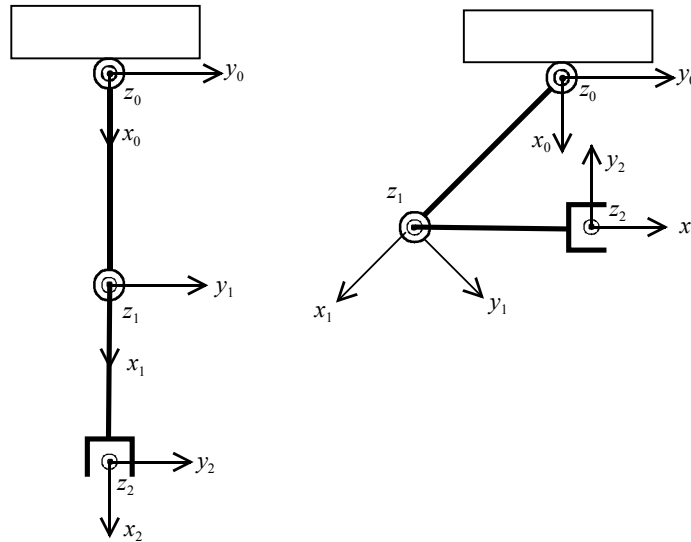


Bild L4: Zu Aufgabe 2.3.6: planarer Zweigelenkroboter in den geforderten Stellungen

**Aufgabe 2.3.7**

Eine Möglichkeit, die Koordinatensysteme festzulegen, zeigt Bild L5. Alle Achsen des SCARA sind parallel. Die Koordinatensysteme  $K_0$  bis  $K_2$  liegen unabhängig von den Gelenkkoordinaten auf derselben Höhe. Fallen die Ursprünge von  $K_2$  und  $K_3$  zusammen, so gilt, wie in der gezeichneten Stellung,  $d_3 = 0$ . Nachdem  $K_4$  und  $K_3$  festgelegt sind, ist darauf zu achten, dass nach der Regel auf Seite 43  $K_2$  und  $K_1$  auf derselben Höhe liegen müssen. Da der Ursprung von  $K_0$  irgendwo auf die erste Achse gelegt werden kann, ist es sinnvoll, auch diese Höhe zu wählen. Es ist zu beachten, dass die Denavit-Hartenberg-Regeln Freiheiten zulassen, und es deshalb mehrere Lösungen geben kann. Für die Denavit-Hartenberg-Parameter erhält man:

Gelenk	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	0	0	$l_1$	0
1	0	0	$l_2$	0
3	0	$d_3$	0	0
4	0	$l_4$	0	0

$\theta_1, \theta_2, d_3$  und  $\theta_4$  sind die variablen Gelenkkoordinaten, sie sind für die gezeichnete Stellung angegeben. Die Vorwärtstransformation wird mit den Gln. (2.26), (2.27) für die gezeichnete Stellung durchgeführt:

$$T_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 + l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Vorwärtstransformation liefert das erwartete Ergebnis. Dies ist nur ein exemplarischer Test und natürlich keine vollständige Überprüfung der Richtigkeit.

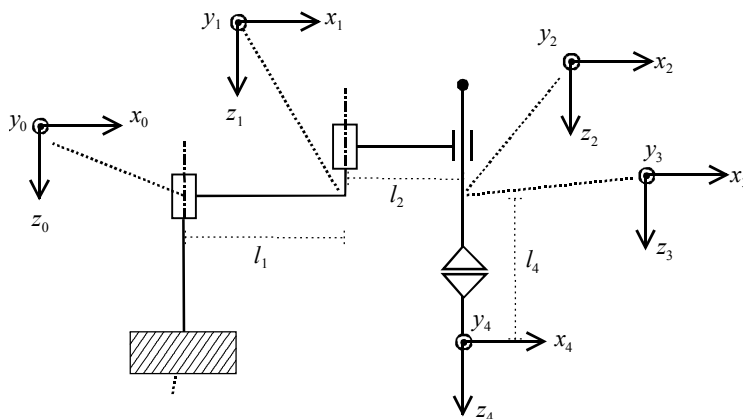


Bild L5: Zu Aufgabe 2.3.7: SCARA mit Koordinatensystemen nach D.-H.

### Aufgabe 2.3.8

Ausgehend von der Stellung aus Aufgabe 2.3.7 wird um Gelenk 2 in positiver  $z_1$ -Richtung um  $90^\circ$  gedreht. Das Schubgelenk bewegt sich in negativer  $z_3$ -Richtung um die Strecke  $-l_4$ , damit sind die Ursprünge von  $K_4$  und  $K_3$  deckungsgleich. Die Position des TCP wird damit zu  $\mathbf{p}^{(0)} = [l_1, l_2, 0]^T$ . Die Lösung für die Euler-Winkel kann aus den abgebildeten Koordinatensystemen  $K_0$  und  $K_4$  in Bild L6 abgelesen werden:  $A = 90^\circ, B = C = 0$ . Unabhängig von der Stellung des Roboters verschwinden die Euler-Winkel  $B$  und  $C$ .

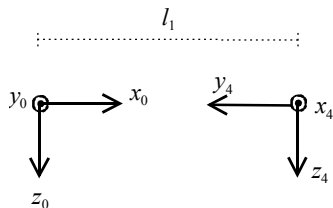


Bild L6: Zu Aufgabe 2.3.8:  $K_0$  und  $K_4$  des SCARA

### Kapitel 3

#### Aufgabe 3.4.1

Die Aufgabe lässt sich mit Gl. (2.26) und Gl. (2.27) bzw. Gl. (3.1) lösen. Die konstanten Denavit-Hartenberg-Parameter aus Bild 2.22 sind zu verwenden und man erhält die allgemeine Lösung (beliebige Gelenkkordinaten):

$$T_w = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 & \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2 & d_3 \cdot (\cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2) \\ \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 & -\cos \theta_1 & \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 & d_3 \cdot (\sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2) \\ \sin \theta_2 & 0 & -\cos \theta_2 & -(d_3 \cdot \cos \theta_2 + l_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mit den Werten  $\theta_1 = 90^\circ$ ,  $\theta_2 = -45^\circ$ ,  $d_3 = 0.5\text{m}$  erhält man für  $T_w$ :

$$T_w = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/4 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 & -(1+\sqrt{2}/4) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Damit wird  $p_0^{(0)} = [0, -\sqrt{2}/4, -(1+\sqrt{2}/4)]^T$ . Die Euler-Winkel werden ausgehend von  $T_w$  mit Gl. (2.21) berechnet. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Rotationsmatrix  ${}^w_0 R$  die nordwestliche (3·3)-Matrix von  $T_w$  ist:

$$A = \arctan 2(1/\sqrt{2}, 0) = 90^\circ, \quad B = \arcsin(-1/\sqrt{2}) = -45^\circ, \\ C = \arctan 2(0, -1/\sqrt{2}) = 180^\circ$$

#### Aufgabe 3.4.2

Mit Gl. (3.8) erhält man  $q_2 = \pm\pi/4 = \pm 45^\circ$ .  $q_1$  lässt sich mit Gl. (3.9) berechnen. Für das positive Vorzeichen von  $q_2$  wird  $q_1 = \pi/4 = 45^\circ$ , für  $q_2 = -\pi/4$  wird  $q_1 = 1.4526 = 83.22^\circ$ . Beide Lösungen sind in Bild L7 grafisch dargestellt. Bei der negativen Lösung für  $q_2$  ist der Euler-Winkel  $A$  kleiner.

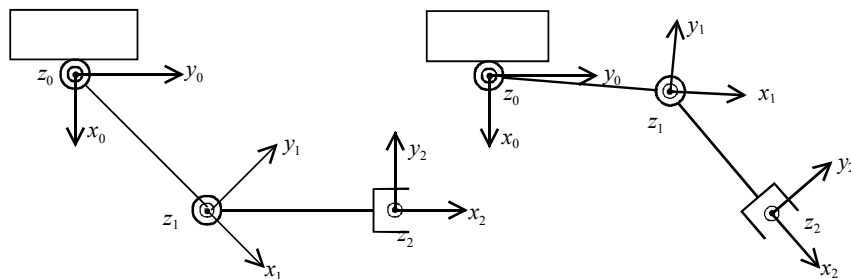


Bild L7: Zu Aufgabe 3.4.2: Zwei Lösungen für die RückwärtsTransformation

### Aufgabe 3.4.3

Der TCP kann sich nur in der  $x_0$ - $y_0$ -Ebene bewegen. Die Gelenkparameter sind  $q_1 = \theta_1$  und  $q_2 = d_2$ . Nach Bild 6.10 gilt jedoch:  $d_2 = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ . In der gezeichneten Stellung ist der Drehwinkel 0. Aus der Zeichnung ist ersichtlich, dass  $\theta_1 = q_1 = \arctan 2(-p_x^{(0)}, p_y^{(0)})$  gilt. Werden keine Bewegungsbeschränkungen betrachtet ist damit die Rückwärtstransformation gelöst. Die Lösungen sind eindeutig.

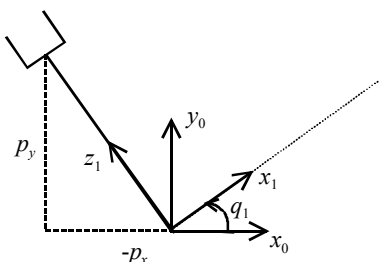


Bild L8: Zu Aufgabe 3.4.3: Zur Rückwärtstransformation des RT-Roboters

## Kapitel 4

### Aufgabe 4.5.1

Mit dem zurückzulegenden Winkelversatz und den geforderten Geschwindigkeiten und Beschleunigungen werden nach Bild 4.7b die Bahnparameter berechnet:

$$\text{Gelenk 1: } t_{b1} = 0.4 \text{ s}, t_{v1} = 0.7854 \text{ s}, t_{e1} = 1.1854 \text{ s}$$

$$\text{Gelenk 2: } t_{b2} = 0.5 \text{ s}, t_{v2} = 1.1781 \text{ s}, t_{e1} = 1.6781 \text{ s}$$

Die Korrekturen werden sinngemäß nach den Gln. (4.15) und (4.16) durchgeführt. Dabei muss in der ersten Gleichung von (4.15)

$$t_b = \text{Ceil} \left( \frac{2 \cdot \hat{v}_m}{\hat{b}_m \cdot T_{-Ipo}} \right) \cdot T_{-Ipo}, \quad t_v = \text{Ceil} \left( \frac{s_e}{\hat{v}_m \cdot T_{-Ipo}} \right) \cdot T_{-Ipo}$$

und in Gl. (4.16)  $b_m = \frac{2 \cdot v_m}{t_b}$  verwendet werden. Mit der Anpassung an die Interpolationsschrittweite erhält man folgende Bahnparameter:

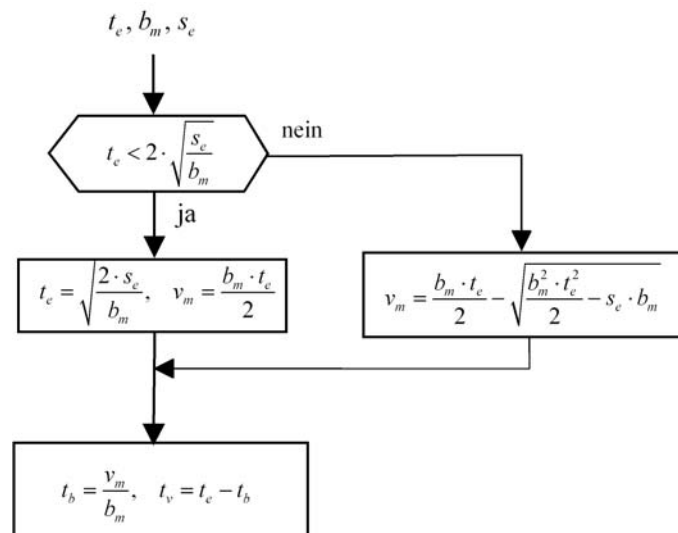
$$\text{Gelenk 1: } t_{b1} = 0.4 \text{ s}, t_{v1} = 0.79 \text{ s}, t_{e1} = 1.19 \text{ s}, v_{m1} = 0.9942 / \text{s}, b_{m1} = 4.971 / \text{s}^2,$$

$$\text{Gelenk 2: } t_{b2} = 0.5 \text{ s}, t_{v2} = 1.18 \text{ s}, t_{e1} = 1.68 \text{ s}, v_{m2} = 1.9968 / \text{s}, b_{m2} = 7.987 / \text{s}^2$$



**Aufgabe 4.5.2**

Über die Beziehung  $t_e = \frac{s_e}{v_m} + t_b = \frac{s_e}{v_m} + \frac{v_m}{b_m}$  kann entsprechend der Berechnung der synchronen PTP (Gl. 4.17) die Geschwindigkeit zu  $v_m = \frac{b_m \cdot t_e}{2} - \sqrt{\frac{b_m^2 \cdot t_e^2}{2} - s_e \cdot b_m}$  berechnet werden. Zuerst muss jedoch geprüft werden, ob  $t_e$  nicht zu klein für die gegebene Beschleunigung und zu fahrende Strecke gewählt worden ist. Dies ist der Fall, wenn der Radikand bei der Berechnung von  $v_m$  negativ wird. Gefahren kann die Bahn, wenn  $t_e < 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot s_e}{b_m}}$ . Ist dies nicht der Fall, wird  $t_e$  auf den Grenzwert  $t_e = 2 \cdot \sqrt{\frac{s_e}{b_m}}$  korrigiert. Unten ist das vollständige Flussdiagramm für die Berechnungen angegeben.

Bild L9: Zu Aufgabe 4.5.2: Flussdiagramm bei Vorgabe von  $t_e, b_m, s_e$ **Aufgabe 4.5.3**

Die Geschwindigkeit kann durch Integration der Beschleunigung und  $s(t)$  durch Integration der Geschwindigkeit gewonnen werden. Für den Zeitbereich  $0 \leq t \leq 1$ s gilt für die Beschleunigung  $b(t) = 8 - 16 \cdot t$  und durch Integration für die Geschwindigkeit  $v(t) = 8 \cdot t - 8 \cdot t^2$ . Da hier angenommen wird, dass die Geschwindigkeit nach dem Bahnsegment zu 0 wird, muss die Beschleunigung im Zeitpunkt  $t = 1$  zu 0 werden. Für die Wegstrecke/Winkelversatz gilt:  $s(t) = 4 \cdot t^2 - (8/3) \cdot t^3$ . Die maximale Geschwindigkeit

muss bei  $t = 0.5\text{ s}$  auftreten und beträgt 2. Bei  $t = 1\text{ s}$  gilt:  $s(1) = s_e = 4/3$ . Bild L10, das mit Matlab ausgegeben wurde, zeigt die Lösung.

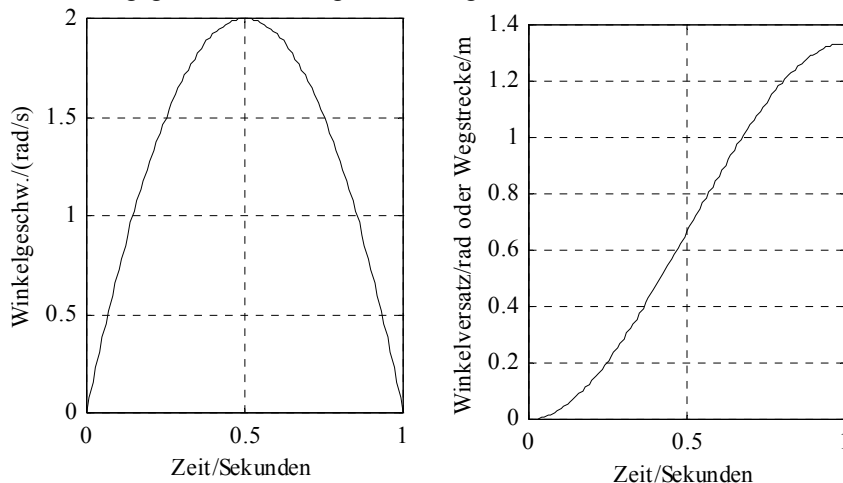


Bild L10: Zu Aufgabe 4.5.3: Verlauf von  $v(t)$  und  $s(t)$

#### Aufgabe 4.5.4

- a) Für die Linearbewegung des TCP erhält man mit Rampenprofil

$$s_{ep} = 0.285\text{ m}, v_p = \sqrt{s_{ep} \cdot b_p} = 0.7549\text{ m/s}, t_{bp} = 0.3774\text{ s}, t_{ep} = 0.7549\text{ s}$$

Die geforderte Geschwindigkeit wurde von der Steuerung korrigiert. Bei den Änderungen in den Euler-Winkeln muss die vorgegebene Geschwindigkeit nicht korrigiert werden:

$$s_{ew} = \pi/2, v_w = 1.5708\text{ rad/s}, t_{bw} = 0.5\text{ s}, t_{vw} = 1\text{ s}, t_{ew} = 1.5\text{ s}$$

Da  $t_e = t_{ew} = 1.5\text{ s}$  gilt, muss die Geschwindigkeit  $v_p$  und damit auch die Bahnzeiten

$t_{bp}, t_{vp}$  nach Gl. (4.30) angepasst werden:

$$v_p = 0.2038\text{ m/s}, t_{bp} = 0.10192\text{ s}, t_{vp} = 1.398\text{ s}, t_{ep} = 1.5\text{ s}$$

- b) Es soll  $t_e = 1\text{ s}$  gelten. Sowohl  $v_w$  als auch  $v_p$  müssen nach der Formel von Gl. (4.29) bzw. Gl. (4.30) angepasst werden. Beginnt man mit der geforderten Beschleunigung  $b_w = \pi/s^2$  und rechnet nach Gl. (4.29), wird der Radikand negativ. Das heißt die Beschleunigung muss erhöht werden, damit die Bahn in einer Sekunde gefahren werden kann. Eine Möglichkeit ist, den Radikanden zu 0 zu setzen und somit die notwendige Beschleunigung zu  $b_w = 4 \cdot s_{ew} / t_e^2 = 6.2832\text{ rad/s}^2$  zu berechnen. Die Geschwindigkeit wird dann nach Gl. (4.29) zu  $v_w = b_w \cdot t_e / 2 = 3.1416\text{ rad/s}$ . Die Bahnzeiten  $t_{bw}$  und  $t_{vw}$  können auf dieser Basis berechnet werden. Die Orientierungsänderung muss also geschwindigkeitsoptimal vorgenommen werden.

Für die Linearbewegung ergibt sich das Problem nicht. Mit Gl. (4.30) kann die Geschwindigkeit zu  $v_p = 0.34426 \text{ m/s}$  berechnet werden, die Beschleunigung wird beibehalten.

### Aufgabe 4.5.5

- a)  $r_{2,y} = r_{1,y} - 0.2 = -0.25$ . Die Hilfspunkte werden in die Mitte der jeweiligen Bahn gelegt. In Koordinaten von  $K_0$  sind die Ortsvektoren dann folgendermaßen gegeben:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{Sr,1} = \mathbf{r}_1 &= [-0.5 \ -0.05 \ -0.95]^T, \mathbf{r}_{H,1} = [-0.5 \ -0.15 \ -1.05]^T, \mathbf{r}_{Z,1} = \mathbf{r}_2 = [-0.5 \ -0.25 \ -0.95]^T \\ \mathbf{r}_{Sr,2} = \mathbf{r}_2 &= [-0.5 \ -0.25 \ -0.95]^T, \mathbf{r}_{H,2} = [-0.5 \ -0.15 \ -0.85]^T, \mathbf{r}_{Z,2} = \mathbf{r}_1 = [-0.5 \ -0.05 \ -0.95]^T \end{aligned}$$

- b) Da der Vektor  $\mathbf{x}_c$  jeweils vom Startpunkt zum Zielpunkt zeigt,  $\mathbf{y}_c$  vom Mittelpunkt weg zeigt und in der Ebene des jeweiligen Kreisbogens liegen muss, kann für diesen einfachen Fall  $K_{C1}$  und  $K_{C2}$  direkt angegeben werden. Allerdings können auch die Gl. (4.31) benutzt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{C1}^{(0)} &= [0 \ -1 \ 0]^T, \mathbf{y}_{C1}^{(0)} = [0 \ 0 \ -1]^T, \mathbf{z}_{C1}^{(0)} = [1 \ 0 \ 0]^T \\ \mathbf{x}_{C2}^{(0)} &= [0 \ 1 \ 0]^T, \mathbf{y}_{C2}^{(0)} = [0 \ 0 \ 1]^T, \mathbf{z}_{C2}^{(0)} = [1 \ 0 \ 0]^T \end{aligned}$$

Die homogenen Matrizen erhält man aus Gl. (4.32):

$$\begin{aligned} {}_{0}^{C1}\mathbf{T} &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{C1}^{(0)} & \mathbf{y}_{C1}^{(0)} & \mathbf{z}_{C1}^{(0)} & \mathbf{r}_{Sr,1}^{(0)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -0.5 \\ -1 & 0 & 0 & -0.05 \\ 0 & -1 & 0 & -0.95 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ {}_{0}^{C2}\mathbf{T} &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{C2}^{(0)} & \mathbf{y}_{C2}^{(0)} & \mathbf{z}_{C2}^{(0)} & \mathbf{r}_{Sr,2}^{(0)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -0.5 \\ 1 & 0 & 0 & -0.25 \\ 0 & 1 & 0 & -0.95 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- c) Die zu fahrende Bahn bei einem Halbkreis ist  $s_{eC} = R \cdot \pi = 0.1 \cdot \pi$ . Es ist zuerst zu prüfen, ob die geforderte Geschwindigkeit korrigiert werden muss. Die Prüfung nach Bild 4.7b ergibt:  $v_C = 2 > \sqrt{0.1 \cdot \pi \cdot 5/2} = 0.88623 \text{ m/s}$ . Die Geschwindigkeit muss auf  $v_C = 0.88623 \text{ m/s}$  korrigiert werden. Ein Halbkreis soll also in  $t_{eC} = (0.1 \cdot \pi / 0.88623 + 2 \cdot 0.88623/5) \text{ s} = 0.70898 \text{ s}$  abgefahren werden. Die Gesamtzeit für beide Halbkreise ist dann  $t_{e,Ges} = 1.418 \text{ s}$ .

**Aufgabe 4.5.6**

Fünf Prozent der programmierten Geschwindigkeit sind  $v_{5\%} = 0.06 \text{ rad/s}$ . Das Überschleifen beginnt beim Anfahren auf den Zielpunkt. Das Überschleifen muss während der Bremszeit beginnen. Der Zeitpunkt kann mit Gl. (4.6) berechnet werden. Für die Bahnzeiten gilt:

$$t_b = v_m / b_m = 0.48 \text{ s}, t_e = s_e / v_m + t_b = 1.789 \text{ s}, t_v = 1.309 \text{ s}$$

Mit Gl. (4.6) ist dann der gefragte Zeitpunkt  $t^*$ :  $t^* = \frac{(v_m - v_{5\%})}{b_m} + t_v = 1.765 \text{ s}$

**Aufgabe 4.5.7**

Für die Bahnsegmente gilt:

$$s_{e1} = \pi/4, v_{01} = 0, v_{e1} = 1 \text{ rad/s}, t_{e1} = 0.5 \text{ s}, s_{e2} = \pi/4, v_{02} = 1 \text{ rad/s}, v_{e2} = 0, t_{e2} = 0.5 \text{ s}$$

Die Berechnung der Spline-Parameter erfolgt mit Gl. (4.57):

$$\text{a) Bahnsegment 1: } a_2 = (3 \cdot \pi - 2) / s^2 = 7.4248 / \text{s}^2, a_3 = (-4 \cdot \pi + 4) / s^3 = -8.5664 / \text{s}^3$$

$$\text{Bahnsegment 2: } a_2 = (3 \cdot \pi - 4) / s^2 = 5.4248 / \text{s}^2, a_3 = (-4 \cdot \pi + 4) / s^3 = -8.5664 / \text{s}^3$$

- b) Die Winkelbeschleunigung soll im ersten Bahnsegment konstant sein. Dann muss aber  $a_3$  im ersten Bahnsegment zu 0 werden (s. Gl. 4.55). Mit dieser Bedingung kann die Geschwindigkeit  $v_{e1}$  des ersten Bahnsegmentes, die bei der Durchfahrt durch  $q_b$  eingenommen wird, berechnet werden:

$$v_{e1} = \frac{2 \cdot s_{e1}}{t_{e1}} - v_{01} = 3.1416 \text{ rad/s}$$

Ausgehend von dieser Bedingung wird die konstante Beschleunigung im ersten Bahnsegment zu  $\ddot{s} = b_{10} = 2 \cdot a_2 = 6 \cdot s_{e1} / t_{e1}^2 - 2 \cdot v_{e1} / t_{e1} = 6.2832 \text{ rad/s}^2$  und die Geschwindigkeit steigt linear mit  $v_1(t) = 2 \cdot a_2 \cdot t = 6.2832 \text{ rad/s}^2 \cdot t$ .

Im zweiten Bahnsegment muss abgebremst werden, um die Geschwindigkeit von  $v_{02} = 3.1416 \text{ rad/s}$  auf  $v_{e2} = 0$  zu bringen.  $a_2, a_3$  werden neu zu  $a_2 = -3.1416 \text{ rad/s}^2$  und  $a_3 = 0$  berechnet. Damit ist aber im zweiten Bahnsegment auch die Beschleunigung konstant:  $b_{20} = -b_{10} = -6.2832 \text{ s}$ . Die Geschwindigkeit wird zu

$$v_2(t) = v_{02} - 2 \cdot a_2 \cdot t = 3.1416 \cdot (1 - 2 \cdot t) \text{ rad/s}^2$$

Damit hat man das Fahrprofil einer geschwindigkeitsoptimalen Bahn nach Bild 4.6 von  $q_A$  nach  $q_C$  erhalten (s. Bild unten)

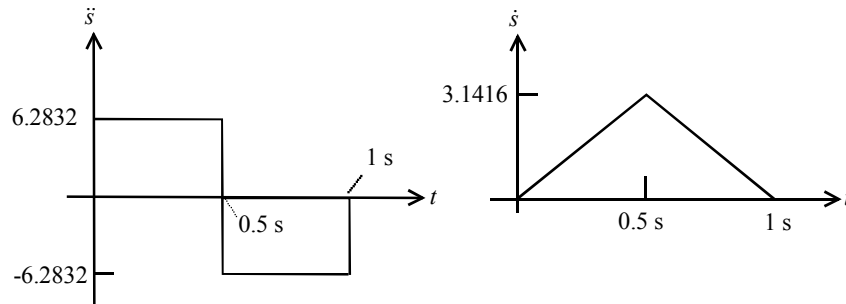


Bild L11: Zu Aufgabe 4.5.7b: Profil der Bahn bei konst. Beschleunigung in Bahnsegment 1

- c) Bild L12 zeigt die Verhältnisse für die in a) berechnete Spline-Bahn. Unten rechts ist zum Vergleich das Geschwindigkeitsprofil einer PTP-Rampenbahn geplottet, wobei die Bewegung im Punkt  $q_C$  kurz ruhen muss.

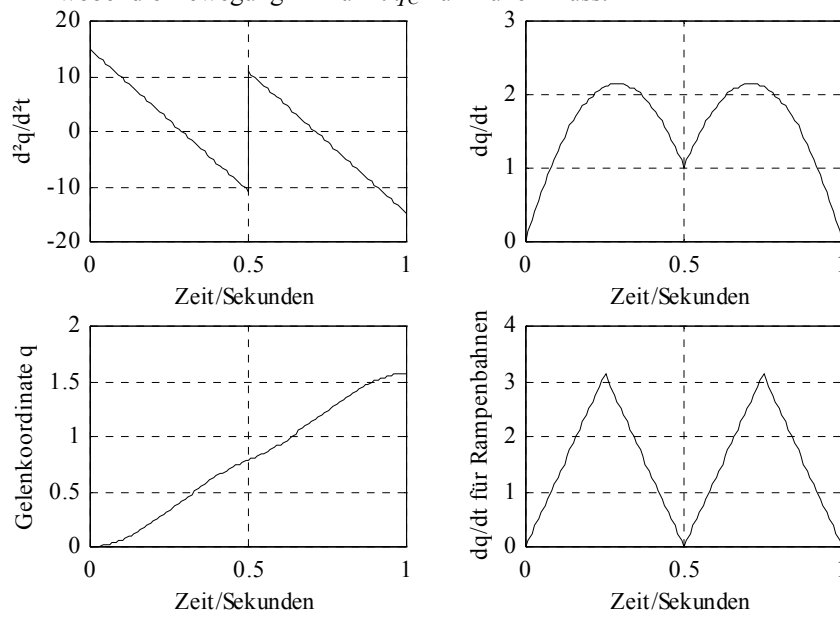


Bild L12: Zu Aufgabe 4.5.7c: Profil der Spline-Bahn von a)

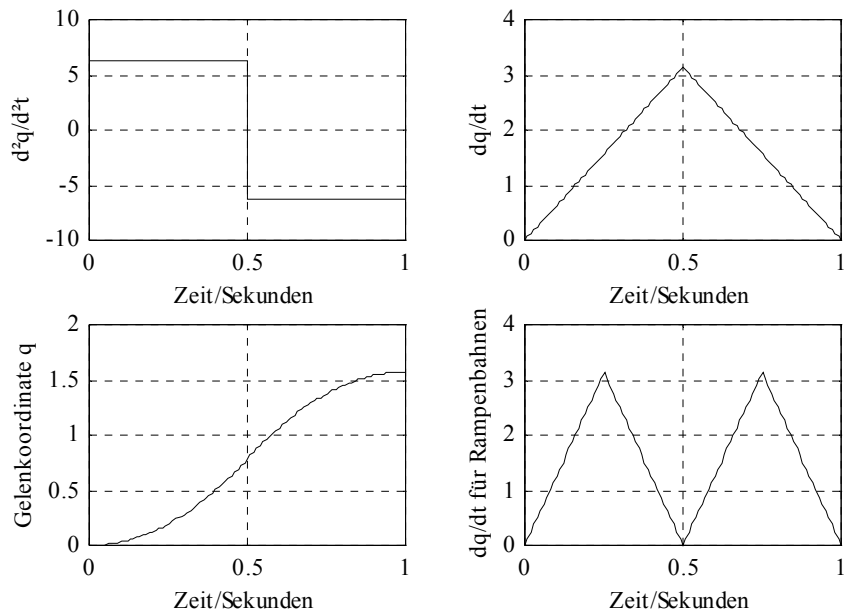


Bild L13: Zu Aufgabe 4.5.7c: Profil der Spline-Bahn von b)

**Aufgabe 4.5.8**

Bahnsegment 1:  $t_{e1} = 0.5\text{s}$ ,  $v_{01} = 0$ ,  $|v_{e1}| = 1\text{m/s}$ . Da der Geschwindigkeitsvektor im Zwischenpunkt vom Startpunkt zum Zielpunkt zeigt, muss gelten:

$$\mathbf{v}_{e1} = \mathbf{v}_{02} = \frac{(\mathbf{p}_C - \mathbf{p}_A)}{|\mathbf{p}_C - \mathbf{p}_A|} \cdot |v_{e1}| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit können für die beiden Bahnsegmente mit den vorhandenen Angaben die Parameter der Spline-Bahn berechnet werden:

Bahnsegment 1:

$$t_{e1} = 0.5\text{s}, \mathbf{v}_{01} = \mathbf{0}, \mathbf{v}_{e1} = (1 \ 0 \ 0)^T \text{m/s} \Rightarrow \mathbf{a}_0 = \mathbf{p}_A = (0.8 \ 0 \ 0.4)^T \text{m},$$

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{v}_{01} = \mathbf{0}, \mathbf{a}_2 = (0.4 \ 0 \ 2.4)^T \text{m}, \mathbf{a}_3 = (0.8 \ 0 \ -3.2)^T \text{m}$$

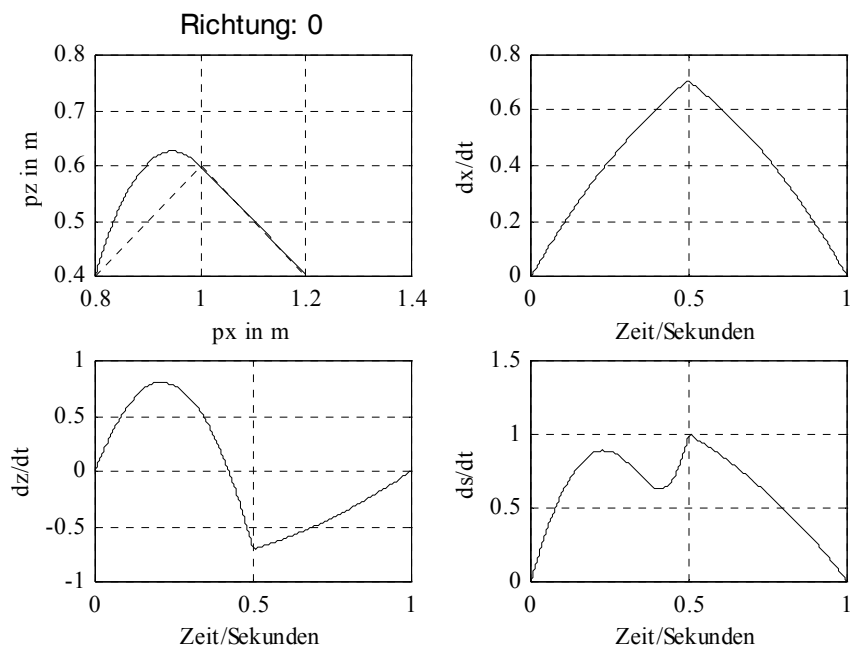
Bahnsegment 2:

$$t_{e2} = 0.5\text{s}, \mathbf{v}_{02} = \mathbf{v}_{e1} = (1 \ 0 \ 0)^T \text{m/s}, \mathbf{v}_{e2} = \mathbf{0}, \Rightarrow \mathbf{a}_0 = \mathbf{p}_B = (1 \ 0 \ 0.6)^T \text{m},$$

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{v}_{02} = (1 \ 0 \ 0)^T \text{m/s}, \mathbf{a}_2 = (-1.6 \ 0 \ -2.4)^T \text{m}, \mathbf{a}_3 = (0.8 \ 0 \ 3.2)^T \text{m}$$

Der Faktor *Richtung* gibt an, in welche Richtung der Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}_{e1} = \mathbf{v}_{02}$  zeigt (s. auch Anhang C). Die Grenzwerte: 100:  $\mathbf{v}_{e1}$  hat die Richtung vom Startpunkt zum Zwischenpunkt, 50: Richtung vom Startpunkt zum Zielpunkt (s. Aufgabenstellung), 0: Richtung vom Zwischenpunkt zum Zielpunkt. Für die Eingabe 50 ist das Ergebnis schon in

Bild (4.26) grafisch dargestellt. Die anderen beiden Ergebnisse sind in Bild L14 abgebildet. Beim Wert 0 ist das zweite Bahnsegment mit dem Verlauf einer Linearbahn (gestrichelt) identisch. Wird der Wert 100 gewählt, fährt im Bahnsegment 1 der TCP auf einer Geraden wie die Linearbahn den Zwischenpunkt an. Beim Wert 50 weicht die Spline-Bahn am stärksten von der Linearbahn ab. Mit dem Faktor Richtung kann also ein Zwischenpunkt auf einer Geraden angefahren werden. Ohne im Zwischenpunkt anzuhalten wird eine nächste Stellung angefahren.



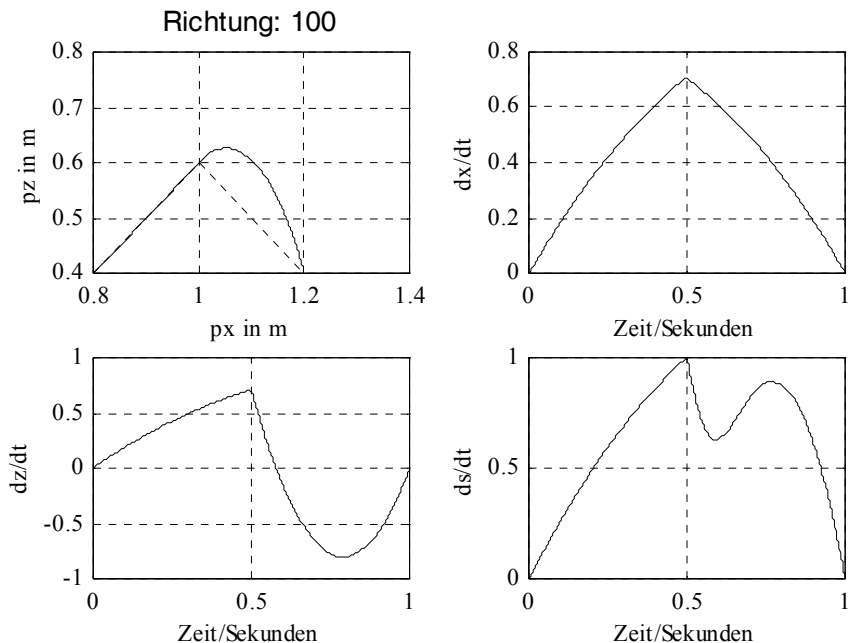


Bild L14: Zu Aufgabe 4.5.8: Profil der CP-Spline-Bahn für zwei Richtungen der Geschwindigkeit im Zwischenpunkt

## Kapitel 5

### Aufgabe 5.6.1

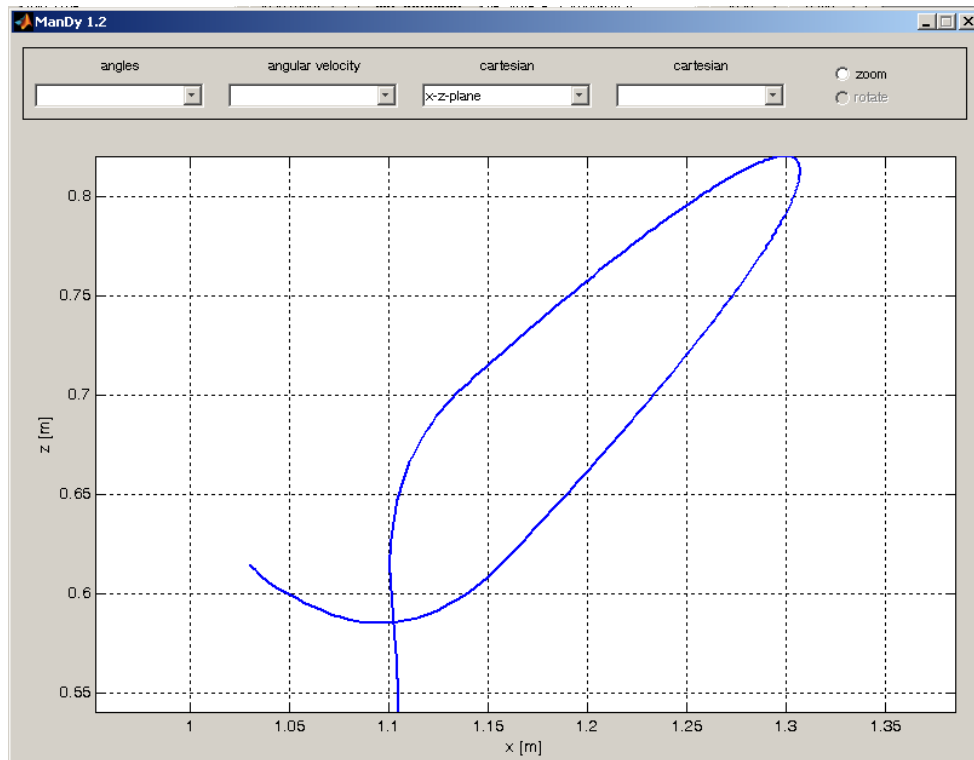
- a) Bei dieser PTP-Bewegung werden die Gelenke 2, 3, 5 bewegt. Wie gefordert wird zuerst eine asynchrone PTP gefahren, wobei das Rampenprofil gewählt wurde. Geschwindigkeiten und Beschleunigungen werden nicht vorgegeben, es werden vorbesetzte Werte von der Steuerung eingesetzt. Folgende Programmzeilen werden verwendet:

```
! Lösung Aufgabe 5.6.1a, W. Weber,
! 1. Absichern durch PTP-Befehl, dass Roboter in Stellung Bild 2.23/2.24 steht
PTP {0 -90 180 180 0 -90} ANGL RAMP
WAIT 0.1
! 2. Fahrt zur Zielstellung mit PTP- Rampenbahn, Zielangabe in Winkeln
PTP {0 0 0 180 90 -90} ANGL RAMP
WAIT 0.1
```

Um mit einem Sinoidenprofil zu fahren wird bei der Fahrt zur Zielstellung der Befehl `PTP {0 0 0 180 90 -90} ANGL SINO` verwendet. Bild L15 zeigt oben die Bahn in der



$x_0$ - $z_0$ -Ebene bei der PTP-Bahn mit Rampenbahn und unten bei der PTP-Bahn mit Sinoidenprofil. Es ist zu erkennen, dass bei der PTP eine nicht direkt vorhersehbare Raumbahn zwischen den Zielstellungen eingenommen wird. Der Startpunkt ist  $x_0 = 1.03$ ,  $z_0 = 0.615$ . Die Raumbahnen sind nicht identisch.



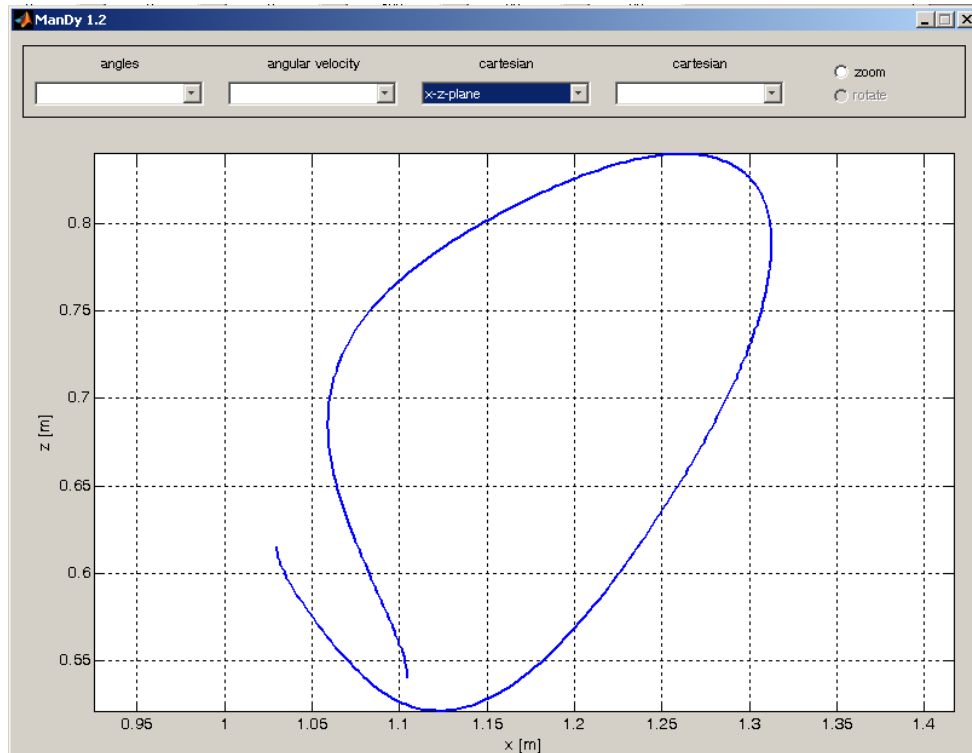


Bild L15: Zu Aufgabe 5.6.1a: Raumkurve des TCP bei PTP-Bahn mit Rampenprofil (oben) und Sinoidenprofil (unten)

b) Es wird jetzt folgendes Programm verwendet:

! Lösung Aufgabe 5.6.1b, W. Weber, Mai 2008

! 1. Absichern durch PTP-Befehl, dass Roboter in Stellung Bild 2.23/2.24 steht

PTP {0 -90 180 180 0 -90} ANGL RAMP

WAIT 0.1

! 2. Fahrt zur Zielstellung mit PTP- Rampenbahn, Zielangabe in Weltkoordinaten

PTP {0 0 0 180 90 -90} CART RAMP {1 1 1 1 1 1}

WAIT 0.1

In diesem Fall wird von ManDy die Zielstellung in Weltkoordinaten auf Gelenkwinkel umgerechnet. Allerdings gibt es dafür mehrere Lösungen (s. auch Kap. 3). Es wird die Lösung genommen bei der die Summe aller Gelenkbewegungen vom Start zum Ziel minimal ist. Das ist jetzt:  $\mathbf{q}_{Ziel} = (0^\circ, -82,5^\circ, 180^\circ, 180^\circ, -7,5^\circ, -90^\circ)^T$ . Für die aktuelle Aufgabe ist diese Verfahrensweise von Vorteil, weil zur Erreichung der Zielstellung der TCP sich vergleichsweise nahe zwischen Start- und Zielstellung bewegt (s. Bild L16).

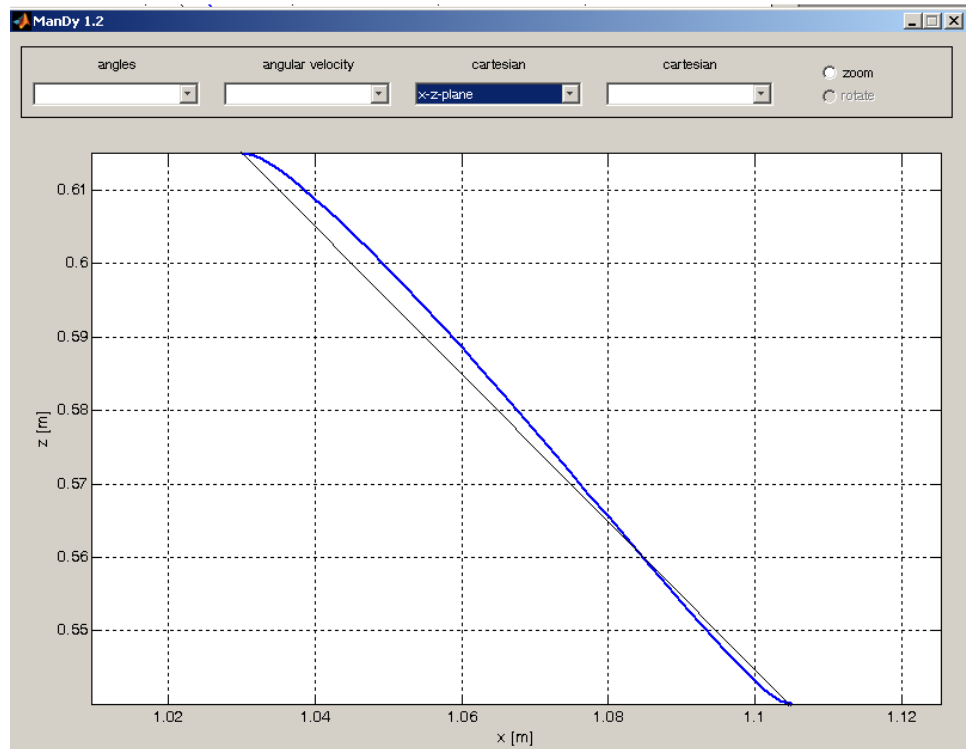


Bild L16: Zu Aufgabe 5.6.1b,c: Raumkurve des TCP bei PTP-Bahn mit Rampenprofil und Zielangabe in Weltkoordinaten (blau), Linearbahn (schwarz)

c) Programm:

Es wird jetzt folgendes Programm verwendet:

! Lösung Aufgabe 5.6.1c, W. Weber

! 1. Absichern durch PTP-Befehl, dass Roboter in Stellung Bild 2.23/2.24 steht

PTP {0 -90 180 180 0 -90} ANGL RAMP

WAIT 0.1

! 2. Fahrt zur Zielstellung mit Linearbahn, Zielangabe in Weltkoordinaten

LIN {1.105 0 0.54 90 0 90} CART RAMP {1 1 1 1 1}

WAIT 0.1

Die Bewegung des TCP findet auf einer Geraden statt (s. Bild L16, durchgezogene schwarze Linie), die Orientierung wird beibehalten. In Winkeln ist die Zielstellung identisch mit der Lösung in b). Allerdings werden auch Schwierigkeiten auftreten, wenn der Roboter umorientieren muss. D.h. Gelenkwinkel müssten sich mit unendlicher Geschwindigkeit ändern, was natürlich nicht möglich ist und deswegen große Bahnabweichungen bei der realen Bewegung verursacht. Eine andere Schwierigkeit

könnte darin bestehen, dass ein Teil der Gerade außerhalb des Arbeitsbereiches liegt, obwohl Start- und Zielstellung sich im Arbeitsraum des Roboters befinden.

### Aufgabe 5.6.2

Es ist möglich, Aufgabenteil 4.5.4a mit ManDy in groben Zügen mit folgendem Programm zu überprüfen:

```
> ! Aufgabe 5.3.2 für Aufg. 4.5.4a
> ! W. Weber, Februar 2002
> SPEEDcp 1 90
> ACCELcp 2 180
> LINr 1.03 0 0.9 90 0 0
> WAIT 0.1
< EOF >.....
```

Bei der Bahnberechnung erhält man die Information, dass die Geschwindigkeit korrigiert werden musste. Man erkennt aus den grafischen Darstellungen, dass ohne die Wartezeit von 0.1 Sekunden die Bahndauer 1.5 Sekunden beträgt.

Zum Test des Aufgabenteils b) werden die berechneten Geschwindigkeiten und Beschleunigungen eingegeben. Mit der Wartezeit dauert die Bahn ca. 1.1 Sekunden.

### Aufgabe 5.6.3

Das Programm ist in Bild 5.8 angegeben.

### Aufgabe 5.6.4

Als Startpunkt für den TCP wird die untere Kante des Quadrates mit den kartesischen Koordinaten  $\mathbf{p}_1=(1.03, 0, 0.615)^T$  gewählt. Die weiteren Ecken des Quadrates sind  $\mathbf{p}_2 = (1.18, 0, 0.765)^T$ ,  $\mathbf{p}_3 = (1.03, 0, 0.915)^T$ ,  $\mathbf{p}_4 = (0.88, 0, 0.765)^T$ . Die Seite des Quadrates hat also eine Länge von  $\sqrt{(0.15)^2 + (0.15)^2} \approx 0.212\text{m}$ . Zum Startpunkt wird mit einer PTP-Bahn gefahren. Anschließend wird mit vier Linearbahnen das Rechteck abgefahren. Der Umkreis wird durch zwei Halbkreise realisiert, wobei die beiden Hilfspunkte  $\mathbf{p}_2$  und  $\mathbf{p}_4$  sind. Geschwindigkeiten und Beschleunigungen werden mit Standardwerten besetzt.

```
! Lösung Aufgabe 5.6.4
PTP {1.03 0 0.615 90 0 90} CART RAMP {1 1 1 1 1 1 }
WAIT { 0.1 }
LIN {1.18 0 0.765 90 0 90} CART RAMP {1 1 1 1 1 1 }
WAIT { 0.1 }
LIN {1.03 0 0.915 90 0 90} CART RAMP {1 1 1 1 1 1 }
WAIT { 0.1 }
LIN {0.88 0 0.765 90 0 90} CART RAMP {1 1 1 1 1 1 }
WAIT { 0.1 }
LIN {1.03 0 0.615 90 0 90} CART RAMP {1 1 1 1 1 1 }
```

```

WAIT { 0.1 }
CIRC {1.18 0 0.765 1.03 0 0.915 90 0 90} CART RAMP {1 1 1 1 1 1 }
WAIT { 0.1 }
CIRC {0.88 0 0.765 1.03 0 0.615 90 0 90} CART RAMP {1 1 1 1 1 1 }
WAIT { 0.1 }

```

## Kapitel 6

### Aufgabe 6.4.1

- a) Mit  $q_1 = \theta_1$  und den Anfangsbedingungen  $\mathbf{v}_0 = \boldsymbol{\omega}_0 = \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 = \mathbf{0}$ ,  $\dot{\mathbf{v}}_0 = (0 \ g \ 0)^T$ , den Vektoren  $\mathbf{p}_1 = (0.8 \ 0 \ 0)^T$ ,  $\mathbf{s}_1 = (-0.2 \ 0 \ 0)^T$  und den Rotationsmatrizen nach Gl. (2.25):

$${}^1_0\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^0_1\mathbf{A} = ({}^1_0\mathbf{A})^T = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & \sin(q_1) & 0 \\ -\sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

kann die Berechnung beginnen. Die Gelenkgrößen werden hier auch symbolisch mitgeführt.  $\mathbf{v}_1$  und  $\mathbf{v}_{s1}$  werden nicht berechnet, da diese Größen nicht zur Berechnung von  $\tau$  benötigt werden. Die kinematischen Berechnungen ergeben:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{q}_1 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} \sin(q_1) \cdot g - 0.8 \cdot \dot{q}_1^2 \\ \cos(q_1) \cdot g + 0.8 \cdot \ddot{q}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{v}}_{s1} = \begin{pmatrix} \sin(q_1) \cdot g - 0.6 \cdot \dot{q}_1^2 \\ \cos(q_1) \cdot g + 0.6 \cdot \ddot{q}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.145 \\ 6.705 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Berechnung der Kräfte/Drehmomente ergibt:

$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} m_1 \cdot g \cdot \sin(q_1) - m_1 \cdot 0.6 \cdot \dot{q}_1^2 \\ m_1 \cdot g \cdot \cos(q_1) + m_1 \cdot 0.6 \cdot \ddot{q}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_1 = \mathbf{F}_1, \quad \mathbf{N}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \cdot \ddot{q}_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 \cdot g \cdot 0.6 \cdot \cos(q_1) + m_1 \cdot 0.6 \cdot 0.6 \cdot \ddot{q}_1 + 0.5 \cdot \ddot{q}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 65.868_1 \end{pmatrix}, \quad \tau_1 = n_{1z} = 65.868 \text{ Nm}$$

Man kann die Lösung auch mit dem Programm N\_E\_2G erhalten, wenn ein fiktives zweites Armteil der Masse (und Trägheit) 0 angesetzt wird mit  $\dot{q}_2 = \ddot{q}_2 = 0$ .

- b) Ausgehend von Bild 6.14 wird freigeschnitten und der Drehimpulserhaltungssatz auf das Gelenk angewandt. Zuerst muss jedoch das Trägheitsmoment  $M$  um das Gelenk mit dem Satz von Steiner berechnet werden:

$$M = I_{zz,1} + m_1 \cdot 0.6^2 = 6.26$$

Durch Freischneiden erhält man:

$$M \cdot \ddot{q}_1 = \tau - m_1 \cdot g \cdot 0.6 \cdot \cos q_1 \Rightarrow \tau = M \cdot \ddot{q}_1 + m_1 \cdot g \cdot 0.6 \cdot \cos q_1 = 65.86$$

- c) Lösungsmöglichkeit mit Freischneiden:

$$(M + m_L \cdot 0.8^2) \cdot \ddot{q}_1 = \tau - m_1 \cdot g \cdot 0.6 \cdot \cos q_1 - m_L \cdot g \cdot 0.8 \cdot \cos q_1 \Rightarrow \tau = 89.24$$

2. Möglichkeit:

Newton-Euler-Verfahren mit neuer Masse  $m_1 = 20$ , neuer Schwerpunktskomponente  $s_{1x} = -(0.8 - (16 \cdot 0.6 + 4 \cdot 0.8) / 20) = -0.16$  und neuer Trägheitskomponente  $I_{zz,1}$  im Schwerpunkt. Da ursprüngliche Masse und Lastmasse im Gelenk dasselbe Massenträgheitsmoment wie die neue Masse mit neuem Schwerpunkt hervorrufen müssen, gilt:  $I_{zz,1} = (0.6)^2 \cdot 16 + (0.8)^2 \cdot 4 + 0.5 - (0.64)^2 \cdot 20 = 0.628$ . Setzt man die neuen Werte ein, erhält man das Ergebnis ebenfalls.

3. Möglichkeit:

Es wird das Newton-Euler-Verfahren mit einem fiktiven Zweigelenkroboter gerechnet:

$$q_2 = \dot{q}_2 = \ddot{q}_2 = 0, \mathbf{p}_2 = \mathbf{s}_2 = \mathbf{0}, \mathbf{I}_{SP,2} = \mathbf{0}, m_2 = 4, {}^2_1\mathbf{A} = {}^1_2\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Man kann die Probe mit dem Programm N\_E\_2G machen.

- d) Nur  $f_{ex,y}^{(1)}$  und  $n_{ex,z}^{(0)}$  können die Bewegung beeinflussen. Alle anderen Komponenten wirken nur auf das Gelenklager.

### Aufgabe 6.4.2

- a) Die Elemente der Systemmatrizen werden in der Form von Gl. (6.21) dargestellt. Das Element  $M_{11}$  erhält man durch die Summe der Koeffizienten von  $\ddot{q}_1$  in  $\tau_1$ ,  $M_{12}$  durch die Summe der Koeffizienten in  $\tau_1$ ,  $M_{22}$  als Summe der Koeffizienten von  $\ddot{q}_2$  in  $\tau_2$ . Es gilt für die Massenmatrix:  $M_{21} = M_{12}$ .  $G_1$  bzw.  $G_2$  sind Terme in  $\tau_1$  bzw.  $\tau_2$ , die weder multiplikativ mit Gelenkgeschwindigkeiten oder Gelenkbeschleunigungen verknüpft ist. Nach einigen Umformungen erhält man als Endergebnis:

$$\begin{aligned}
M_{11} &= 2.758 + 6.704 \cdot \sin^2 q_2 + 32.64 \cdot \cos^2 q_2 + 22.18 \cdot \cos q_2, \\
M_{12} = M_{21} &= 0, \quad M_{22} = 27.74, \quad G_1 = 0, \quad G_2 = 396 \cdot \cos q_2, \\
C_{11} = C_{13} &= 0, \quad C_{12} = -22.18 \cdot \sin q_2 - 51.87 \cdot \cos q_2 \cdot \sin q_2, \\
C_{21} &= 25.94 \cdot \cos q_2 \cdot \sin q_2 + 11.09 \cdot \sin q_2, \quad C_{22} = C_{23} = 0
\end{aligned}$$

- b) Werden die Werte für die Gelenkgrößen eingesetzt, erhält man folgende Matrix-

gleichung: 
$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.46 & 0 \\ 0 & 27.736 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 22.18 & 0 \\ -11.09 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82.2 \\ 44.39 \end{pmatrix}.$$

Das sind aber die Werte für die Drehmomente in den Gelenken des R6-12 aus dem Beispiel von Abschn. 6.5.2.

- c) Mit den angegebenen Werten und den Gln. (6.36), (6.46)- (6.48) erhält man die Form:

$$\mathbf{U}_S = \mathbf{M}^*(q) \cdot \ddot{q} + \mathbf{G}^*(q) + \mathbf{C}^*(q) \cdot \dot{q} + \mathbf{R}^* \cdot \dot{q}$$

$$\mathbf{M}^* = \begin{pmatrix} 0.01736 & 0 \\ 0 & 0.008681 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.3404 & 0 \\ 0 & 0.4859 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}^* = \begin{pmatrix} 0.01736 & 0 \\ 0 & 0.008681 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{G}, \quad \mathbf{C}^* = \begin{pmatrix} 0.01736 & 0 \\ 0 & 0.008681 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{C}$$

$$\mathbf{R}^* = \begin{pmatrix} 0.00083 & 0 \\ 0 & 0.0015 \end{pmatrix}$$

$$M_{11}^* = 0.38828 + 0.1136 \cdot \sin^2 q_2 + 0.5666 \cdot \cos^2 q_2 + 0.385 \cdot \cos q_2,$$

$$M_{12}^* = M_{21}^* = 0, \quad M_{22}^* = 0.686, \quad G_1^* = 0, \quad G_2^* = -2.857 \cdot \cos q_2,$$

$$C_{11}^* = C_{13}^* = 0, \quad C_{12}^* = -0.385 \cdot \sin q_2 - 0.9 \cdot \cos q_2 \cdot \sin q_2,$$

$$C_{21}^* = 0.187 \cdot \cos q_2 \cdot \sin q_2 + 0.08 \cdot \sin q_2, \quad C_{22}^* = C_{23}^* = 0$$

- d) Das maximale Trägheitsmoment um die Gelenkachse 1 ( $M_{11, \max}$ ) tritt dann auf, wenn der Schwerpunkt des Armteils 2 den maximalen Abstand von der Gelenkachse hat. Dies ist aber gerade für  $\theta_2 = q_2 = 0$  der Fall (Bild 2.21). Im Gegensatz dazu wird das minimale Trägheitsmoment auftreten, wenn der Schwerpunkt des Armteils 2 auf der Gelenkachse liegt. Aus Bild L16 kann berechnet werden, dass dies bei  $115.1^\circ = 2.009$  rad der Fall ist. Durch Auswertung von  $M_{11}$  bzw.  $M_{11}^*$  in den Aufgabenteilen b und c erhält man:

$$M_{11,\max} = 57.57, M_{11,\min} = 4.72, M_{11,\max} / M_{11,\min} = 12.19$$

$$M_{11,\max}^* = 1.34, M_{11,\min}^* = 0.4227, M_{11,\max}^* / M_{11,\min}^* = 3.17$$

Das Verhältnis bei Berücksichtigung der Antriebe ist kleiner, da die Trägheitsmomente des Motorankers mit eingehen. Diese Trägheitsmomente sind nicht lageabhängig und erhöhen das Verhältnis zwischen konstanten und lageabhängigen Anteilen.

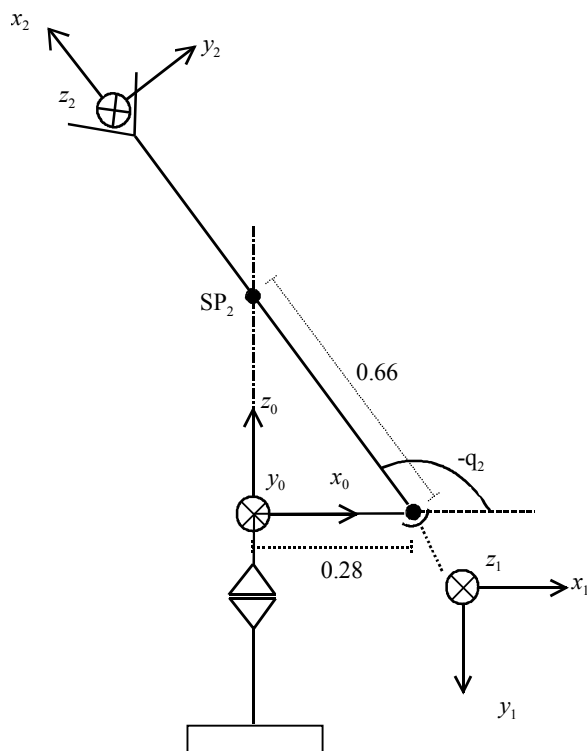


Bild L16: Zu Aufgabe 6.4.2d: Stellung bei der minimales Trägheitsmoment bez. Gelenk1 wirkt.

### Aufgabe 6.4.3

- a) Es kann vollständig mit einem stationären Zustand gerechnet werden, da der Gravitationseinfluss unabhängig von Geschwindigkeiten und Beschleunigungen ist. Alle Gelenkgeschwindigkeiten und Gelenkbeschleunigungen und damit alle Vektoren  $\omega_i$  und  $\dot{\omega}_i$  können zu  $\mathbf{0}$  gesetzt werden. Die Gln. (6.17), (6.18) vereinfachen sich damit zu:



$$\dot{\mathbf{v}}_{i+1} = {}^{i+1}_i \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{v}}_i$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{s,i+1} = \dot{\mathbf{v}}_{i+1}$$

$$\text{Anfangsbedingungen: } \dot{\mathbf{v}}_0 = -\mathbf{g}$$

$$\mathbf{F}_i = m_i \cdot \dot{\mathbf{v}}_{s,i}$$

$$\mathbf{f}_i = {}^{i+1}_i \mathbf{A} \cdot \mathbf{f}_{i+1} + \mathbf{F}_i,$$

$$\mathbf{n}_i = {}^{i+1}_i \mathbf{A} \cdot [\mathbf{n}_{i+1} + ({}^{i+1}_i \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_i) \times \mathbf{f}_{i+1}] + (\mathbf{p}_i + \mathbf{s}_i) \times \mathbf{F}_i,$$

$$\boldsymbol{\tau}_i = [h_i \cdot \mathbf{n}_i^T + (1 - h_i) \cdot \mathbf{f}_i^T] \cdot {}^{i-1}_i \mathbf{A} \cdot \mathbf{z},$$

$$\text{Anfangsbedingungen: } \mathbf{f}_{n+1}, \mathbf{n}_{n+1} \quad .$$

b) Die Durchführung der Berechnung ergibt:  $\tau_1 = 10.392 \text{ Nm}$ ,  $\tau_2 = 2.598 \text{ Nm}$

Sie können die Lösung auch durch entsprechende Eingaben mit NE\_2G oder Mod\_2G erhalten.

#### Aufgabe 6.4.4

Die Eingaben in Mod\_2G wurden bis auf die Denavit-Hartenberg-Parameter und den Werten 0 von Komponenten in den Vektoren  $\mathbf{s}_i$  und  $\mathbf{p}_i$  symbolisch vorgenommen. Im Folgenden die kopierten Ergebnisse.

M11=

$$(1/2+s2x)*m2*(s2x+1/2*\cos(q2)+1/2)+ISP2\_z+1/2*\cos(q2)*m2*(s2x+1/2*\cos(q2)+1/2)+1/4*\sin(q2)^2*m2+(1/2+s1x)^2*m1+ISP1\_z$$

M12=M21=

$$(1/2+s2x)^2*m2+ISP2\_z+1/2*\cos(q2)*m2*(1/2+s2x)$$

M22=

$$(1/2+s2x)^2*m2+ISP2\_z$$

G1=

$$(1/2+s2x)*m2*(\sin(q2)*\cos(q1)*g+\cos(q2)*\sin(q1)*g)+1/2*\cos(q2)*m2*(\sin(q2)*\cos(q1)*g+\cos(q2)*\sin(q1)*g)+1/2*\sin(q2)*m2*(-\cos(q2)*\cos(q1)*g+\sin(q2)*\sin(q1)*g)+(1/2+s1x)*m1*\sin(q1)*g$$

G2=

$$(1/2+s2x)*m2*(\sin(q2)*\cos(q1)*g+\cos(q2)*\sin(q1)*g)$$

Hier die Matrix  $\mathbf{C}$  in kompakter Form:

$\mathbf{C} =$

$$\begin{bmatrix} 0, & -m2*\sin(q2)*s2x-1/2*m2*\sin(q2), & -1/2*m2*\sin(q2)*s2x-1/4*m2*\sin(q2) \\ 1/2*m2*\sin(q2)*s2x+1/4*m2*\sin(q2), & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

## Kapitel 7

### Aufgabe 7.7.1

Entsprechend Gl. (7.6) und Gl. (7.9) erhält man als für den offenen und geschlossenen Regelkreis:

$$F_{0v}(s) = K_P \cdot \frac{(1+T_N \cdot s)}{T_N \cdot s} \cdot \frac{1}{M^* \cdot s}, \quad G_v(s) = \frac{(1+T_N \cdot s)}{1+T_N \cdot s + \frac{T_N \cdot M^*}{K_P} \cdot s^2}$$

Mit

$$1+T_N \cdot s + \frac{T_N \cdot M^*}{K_P} \cdot s^2 = 1 + 2 \cdot d_R \cdot T_R \cdot s + T_R^2 \cdot s^2$$

werden durch Koeffizientenvergleich statt Gl. (7.11) die Vorschriften

$$K_P = \frac{2 \cdot d_R}{T_R} \cdot M^*, \quad T_N = 2 \cdot d_R \cdot T_R$$

erhalten.

### Aufgabe 7.7.2

Die Strecke in Bild 7.5 mit  $z = 0$  und  $F_D^* = 0$  hat Integrierverhalten. Diese Strecke wird mit Gl. (7.17) verglichen, um die Parameter  $a_0, a_1, a_2$  zu erhalten:

$$F_{St,v}(s) = \frac{1}{M^* \cdot s} \Rightarrow a_0 = 0, \quad a_1 = M^*, \quad a_2 = 0$$

Die Regelparameter des ReDuS-Reglers erhält man dann durch Anwendung von Gl. (7.20):

$$\beta = 0, \quad K_I = \frac{M^*}{T_R^2}, \quad \alpha = \frac{2 \cdot d_R}{T_R} \cdot M^*$$

### Aufgabe 7.7.3

Die Anregelzeit und die Überschwingweite werden grafisch ermittelt:

$$T_{An} \approx 0.07 \text{ s}, \quad \ddot{u} \approx 0.32$$

Die Näherung durch ein P-T<sub>2</sub>-Glied erfolgt über  $d_v, T_v$  nach Gl. (7.28):

$$d_v \approx 0.341, \quad T_v \approx 0.0343 \text{ s}$$

Durch die Vorgabe  $\varphi_R = 75^\circ = 1.309 \text{ rad}$  wird mit Gl. (7.35) die Durchtrittskreisfrequenz  $\omega_D$  zu  $10.086/\text{s}$  und damit berechnet sich nach Gl. (7.36)  $K_L$ :

$$K_L = 9.1925/\text{s}$$

Der Regelfehler bei gleichbleibender Geschwindigkeit lässt sich durch Gl. (7.42) oder mit Hilfe von Bild 7.11 berechnen:  $e_\infty \approx 0.0435 \text{ rad}$

#### Aufgabe 7.7.4

Es gilt  $a = T_L^2 = 0.0625 \text{ s}^2$ ,  $b = 2 \cdot d_L \cdot T_L = 0.5 \text{ s}$ . Mit Gl. (7.49) können dann die Parameter ermittelt werden, auf die die Regelparameter einschwingen:

$$K_p = 48 \text{ V/rad}, \quad K_v = 24 \text{ V} \cdot \text{s/rad}$$

#### Aufgabe 7.7.5

Nach Gl. (7.58) gilt  $\ddot{q}_i = r_i$  und damit wird das vorgegebene Übertragungsverhalten im Zeitbereich:

$$\ddot{q}_i = r_{0,i} = K_{p,i} \cdot (q_{S,i} - q_i) + K_{I,i} \cdot \int_0^t (q_{S,i} - q_i) d\tau$$

Um das Übertragungsverhalten im Bildbereich aufzustellen, wird obige Gleichung differenziert und man erhält:

$$q_i^{(3)} = K_{p,i} \cdot (\dot{q}_{S,i} - \dot{q}_i) + K_{I,i} \cdot (q_{S,i} - q_i)$$

Nun wird die Laplace-Transformation vorgenommen und nach  $Q_i(s)$  aufgelöst:

$$Q_i(s) = \frac{K_{p,i} \cdot s + K_{I,i}}{s^3 + K_{p,i} \cdot s + K_{I,i}} \cdot Q_{S,i}(s)$$

Das vorgegebene Übertragungsverhalten ist nicht stabil, also auch nicht geeignet. Die Stabilitätsbedingung ist verletzt, da der Koeffizient von  $s^2$  in der charakteristischen Gleichung  $s^3 + K_{p,i} \cdot s + K_{I,i}$  verschwindet.

#### Aufgabe 7.7.6

Wie in Beispiel 7.4.8 wird für jedes Gelenk das gleiche dynamische Verhalten eingestellt. Das in diesem Beispiel geforderte P-T<sub>1</sub>-Verhalten für den Geschwindigkeitsregelkreis,

lässt sich mit den Parametern  $K_p$  und  $T_N$  über Gl. (7.69) nicht realisieren. Es wird zuerst versuchsweise  $d_R = 1$  und  $T_R = 0.025\text{s}$  vorgegeben. Mit der Gl. (7.71) erhält man dann

$$K_p = 80, \quad T_N = 0.05\text{s}$$

Anschließend wird für den Lageregelkreis  $d_L = 1$  gewählt und mit Gl. (7.32) kann  $K_L$  berechnet werden:  $K_L = 10$ .

Die Simulation wird mit ManDy für diese Lösung und der Regelungsstruktur aus 7.4.8 vorgenommen. Sie unterscheiden sich im Regelungsverhalten nur marginal.